# Ejercicios Análisis I

Grado en Ciencias Físicas 2019-2020

Hoja 5: Cálculo diferencial.

**1.** Sea $f$ tal que $\lim_{x\to a} f(x) = 0$. Probar que

$$\lim_{x\to a} \big(1 + f(x)\big)^{1/f(x)} = \mathrm{e}\,.$$

**2.** Calcular los siguientes límites:

A. $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\tan^3 x}{x^4 + x^3}\,.$

B. $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{(\mathrm{e}^x - 1)^2\ \sin^2 x}{\tan^3 x}\,.$

C. $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)^2}{3\,\sin^4 x + \sin^5 x}\,.$

D. $\displaystyle \lim_{x\to 0} (\cos x)^{1/\sin^2 x}\,.$

E. $\displaystyle \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^{[x]}}\,.$

F. $\displaystyle \lim_{x\to +\infty} \frac{\log(x^4 + x^2 + 1)}{\log(x^{10} + x^7 + 100)}\,.$

G. $\displaystyle \lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{2\,x-1}\,.$

H. $\displaystyle \lim_{x\to 0} \left(\frac{2 + x\,2^x}{2 + x\,3^x}\right)^{1/x}\,.$

I. $\displaystyle \lim_{x\to 1} (x^5 - 2\,x^4 + 3)^{-2/(x-1)^3}\,.$

J. $\displaystyle \lim_{x\to 0^+} \big|\sin x\big|^{1/\log x}\,.$

K. $\displaystyle \lim_{x\to +\infty} (7\,x + 5\,x^4)^{1/(6+2\,\log(2\,x+1))}\,.$

**3.** Estudiar la continuidad y derivabilidad de las siguientes funciones. Calcular la derivada en los puntos que exista.

A. $f(x) = x^{1/3}\,.$

B. $f(x) = \arccos x\,.$

C. $\displaystyle f(x) = \frac{x^3}{|x|}\,.$

D. $f(x) = 2^{-1/|x|}\,.$

E. $\displaystyle f(x) = \frac{\sin x}{x}\,.$

F. $f(x) = \log|x|\,.$

G. $\displaystyle f(x) = \log \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x}\,.$

H. $f(x) = \mathrm{e}^{-1/x^2}\,.$

I. $\displaystyle f(x) = x^2\ \sin\frac{1}{x}\,.$

**4.** Calcular las derivadas de las siguientes funciones:

A. $y = \log \dfrac{x^2-1}{x^2+1}\,.$

B. $y = \sin \log x\,.$

C. $y = \log(x^2 \log^3 x)\,.$

D. $y = x^{\tan 2\pi x}\,.$

E. $y = \arcsin \sqrt{x^2-1}\,.$

F. $y = \arctan \sqrt{x^2-1}\,.$

G. $y = x^{x^{\cos x}}\,.$

H. $y = x^{\log x}\,.$

I. $y = (\log x)^x\,.$

J. $y = \sqrt[3]{\dfrac{x-1}{x+1}}\,.$

K. $y = \tan(x^2 + \log x + \arctan x)\,.$

L. $y = 2^{\sec(x^3+7\,x-10)}\,.$

M. $y = \sec(\operatorname{cosec} x)\,.$

N. $y = (x^2+1)^{\mathrm{e}^x}\,.$

Ñ. $y = \sqrt[5]{\cot^8 x^2}\,.$

O. $y = x^{1/x}\,.$

P. $y = \log_x \mathrm{e}^x\,.$

Q. $y = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}\,.$

**5.** Hallar el valor de los parámetros para que las funciones que se definen a continuación sean derivables en todo su dominio:

$$f_1(x) = \begin{cases} x^2\,, & \text{si} \quad x \le 2\,, \\ a\,x + b\,, & \text{si} \quad x > 2\,. \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} a + b\,x^2\,, & \text{si} \quad |x| \le 2\,, \\ \dfrac{1}{|x|}\,, & \text{si} \quad |x| > 2\,. \end{cases}$$

$$f_3(x) = \begin{cases} a\,\cos x\,, & \text{si} \quad x \le 0\,, \\ b - x^2\,, & \text{si} \quad 0 < x < 1\,, \\ c\,\arctan x\,, & \text{si} \quad 1 \ge x\,. \end{cases}$$

$$f_4(x) = \begin{cases} a + \sin \pi x\,, & \text{si} \quad x \le 0\,, \\ a + b\,x\,, & \text{si} \quad 0 < x < 2\,, \\ c\,\mathrm{e}^{x^2}\,, & \text{si} \quad x \ge 2\,. \end{cases}$$

**6.** Probar que si $y = f(x)$ es derivable en $x = a$ y $f(a) \neq 0$ entonces $y = |f(x)|$ es derivable en $x = a$.

**7.** ¿Cuántas derivadas sucesivas existen para la función $f(x) = |x|^3$? Calcularlas. Hacer lo mismo con $g(x) = x\,|x|$.

**8.** Sean $I$ un intervalo abierto y $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función derivable en cierto $a \in I$ . Definimos

$$t(x) = f(a) + f'(a)\,(x - a)\,.$$

Probar que $t(x)$ es la mejor aproximación lineal a la gráfica de $f$ en el punto $\big(a, f(a)\big)$, es decir, demostrar:

A. $\displaystyle \lim_{x \to a} \frac{f(x) - t(x)}{x - a} = 0\,.$

B. Si $\ell(x) = m\,x + n$ y

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - \ell(x)}{x - a} = 0\,,$$

entonces $\ell(x) = t(x)\,.$

**9.** Calcular el valor máximo y mínimo de la función $f(x) = x^3 - 3\,x^2 - 9\,x + 1$ en el intervalo $[-2, 6]\,.$

**10.** Dados $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ , encontrar el mínimo valor de la función

$$F(x) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x - a_k)^2}\;.$$

**11.** (*) Encontrar justificadamente el valor máximo de las funciones

$$F(x) = \frac{1}{1 + |x|} + \frac{1}{1 + |x - 2|}$$

y

$$G(x) = \frac{1}{1 + |x - 1|} + \frac{1}{1 + |x + 1|}\,.$$

**12.** Demostrar que de entre todos los rectángulos de igual perímetro, el de mayor área es el cuadrado.

**13.** Una empresa de envasado de tomate frito quiere fabricar latas cilíndricas de volumen fijo $V$ . ¿Cuál debe ser la relación entre el radio de la base $R$ y la altura $h$ de la lata para que su construcción requiera el mínimo gasto de material?

**14.** (*) Se dice que una función $f$ definida en un intervalo $I$ satisface la condición de LIPSCHITZ si existe una constante $C > 0$ tal que para todo $x, y \in I$ se verifica

$$|f(x) - f(y)| \leq C\,|x - y|\,.$$

En general, se dice que la función es HÖLDER continua de orden $\gamma > 0$ cuando

$$|f(x) - f(y)| \leq C\,|x - y|^{\gamma}\,.$$

A. Probar que toda función HÖLDER continua es continua.

B. Probar que si $f$ es HÖLDER continua de orden $\gamma > 1$, entonces $f$ es derivable. Mostrar que, de hecho, $f$ debe ser constante.

**15.** Obtener las siguientes desigualdades usando el Teorema del valor medio:

A. $1 + x \leq \mathrm{e}^x$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

B. $\log(1 + x) < x$, para todo $x > 0$.

**16.** Demostrar que la ecuación $x^3 - 3\,x + k = 0$, con $k \in \mathbb{R}$, tiene a lo sumo una solución en $[-1, 1]$. ¿Para qué valores de $k$ existe efectivamente la solución?

**17.** Demostrar que la ecuación $6\,x^4 - 7\,x + 1 = 0$ no tiene más de dos raíces reales distintas.

**18.** Demostrar que la ecuación $6\,x^5 + 13\,x + 1 = 0$ tiene exactamente una raíz real.

**Comentarios:** (*) ejercicio difícil, (**) ejercicio muy difícil.